

<https://doi.org/10.52387/1811-5470.2025.4.06>
 CZU: 51:37.015/.091:159.954.4

ABORDĂRI EURISTICE ALE REZOLVĂRII PROBLEMELOR CU PARAMETRI ÎN DEZVOLTAREA CAPACITĂȚILOR INTELECTUALE

Ozkan TURAN,

doctorand, Școala Doctorală Științe ale Educației,
 Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău, RM

ORCID:0000-0002-4571-2015

E-mail: ozkanturan@orizont.md

Rezumat. În acest articol se analizează unele tehnici euristice utilizate în rezolvarea problemelor care implică parametri, în contextul formării și dezvoltării capacităților intelectuale la elevi. Într-o lume în continuă schimbare, dezvoltarea abilităților critice și de rezolvare a problemelor devine esențială pentru succesul educațional al tinerilor. Problemele cu parametri se întâlnesc frecvent în matematică și pot fi o provocare pentru elevi și profesori. Utilizarea metodelor euristice facilitează explorarea, descoperirea și înțelegerea conceptelor matematice, precum și dezvoltarea abilităților intelectuale la elevi. Scopul constă în investigarea eficienței metodelor euristice în dezvoltarea capacităților intelectuale ale elevilor, în vederea îmbunătățirii procesului educațional la matematică. Obiectivele propuse țin de examinarea conceptului de metode euristice și identificarea tehnicilor principale care stau la baza acestora; implementarea practică și dezvoltarea unui cadru metodologic pentru integrarea acestor metode în curriculumul școlar la matematică; evaluarea impactului aplicării metodelor euristice asupra activității intelectuale a elevilor pe parcursul rezolvării problemelor cu parametri utilizând tehnici euristice. Studiul analizează diferite tehnici euristice, cum ar fi: transformarea problemei cu un parametru prin înlocuirea unei variabile ce conduce la transformarea problemei inițiale într-o problemă de alt tip; analiză prin sinteză; efectuarea descoperirii prin cercetare; tehnica efectuării dialogului euristic de rezolvare a problemelor cu parametri; construcția modelelor de rezolvare a problemei cu parametri; utilizarea generalizării urmată de posibilitatea rezolvării noilor sarcini apărute; tehnica inventării, evidențiind impactul acestora asupra procesului de învățare. Metodele euristice, prin natura lor, încurajează gândirea creativă și flexibilitatea mentală, oferind elevilor instrumente eficiente pentru a aborda probleme complexe. Rezultatele sugerează că implementarea metodelor euristice nu doar că îmbunătățește capacitatea elevilor de a rezolva probleme, dar contribuie și la dezvoltarea abilităților de colaborare și comunicare. În articol se subliniază importanța integrării metodelor euristice în curricula școlară, ca parte a unei strategii mai largi de dezvoltare a competențelor intelectuale la elevi, și propune direcții pentru cercetări viitoare în acest domeniu.

Cuvinte-cheie: probleme cu parametri, metode euristice, tehnici euristice, activitate intelectuală, capacități intelectuale.

HEURISTIC APPROACHES TO SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS IN THE DEVELOPMENT OF INTELLECTUAL CAPACITIES

Abstract. This article analyzes certain heuristic techniques used in solving problems involving parameters, in the context of the formation and development of students' intellectual abilities. In a constantly changing world, the development of critical thinking and problem-solving skills becomes essential for the educational success of young people. Parameter-based problems are frequently encountered in mathematics and can be a challenge for both students and teachers. By their nature, heuristic methods encourage creative thinking and mental flexibility, providing students with effective tools for tackling complex problems. The use of heuristic methods facilitates the exploration, discovery, and understanding of mathematical concepts and the development of students' intellectual abilities. The aim is to investigate the effectiveness of heuristic methods in developing students' intellectual capacities, with a view to improving the educational process in mathematics. The proposed objectives include examining the concept of heuristic methods and identifying the main techniques underlying them; practical implementation and the development of a methodological framework for integrating these methods into the school mathematics curriculum; evaluating the impact of applying heuristic methods on students' intellectual activity during the process of solving parameter-based problems using heuristic techniques. The study analyzes various heuristic techniques, such as: transforming the parameter-based problem by substituting a variable, which leads to turning the original problem into a problem of a different nature; analysis through synthesis; making discoveries through research; the

technique of conducting a heuristic dialogue for solving parameter-based problems; constructing models for solving parameter-based problems; using generalization followed by the possibility of solving new emerging tasks; the invention technique-highlighting their impact on the learning process. By their nature, heuristic methods encourage creative thinking and mental flexibility, providing students with effective tools for tackling complex problems. The results suggest that implementing heuristic methods not only improves students' ability to solve problems but also contributes to the development of collaboration and communication skills. The article emphasizes the importance of integrating heuristic methods into the school curriculum as part of a broader strategy for developing students' intellectual competencies and proposes directions for future research in this field.

Keywords: Problems with parameters, heuristic methods, heuristic techniques, intellectual activity, intellectual capacities.

Introducere. Actualizarea patrimoniului filosofic, a experienței istorice, pedagogice și metodologice a predării matematicii va ajuta la dezvoltarea esenței și semnificației pedagogice a conceptului de *orientare euristică a gândirii*, care, la rândul său, va ajuta la identificarea gradului de concentrare a cursului de matematică preuniversitar asupra formării orientării euristice a gândirii. .

Începutul secolului XXI se caracterizează prin identificarea primelor semne ale unei schimbări în paradigma educației în direcția priorității dezvoltării personalității și a autorealizării elevului. Tranziția la noi relații socioeconomice impune necesitatea dezvoltării abilităților intelectuale pentru a depăși problemele apărute, de a oferi soluții non-standard și de a acționa productiv pe baza potențialului educativ acumulat. O nouă perspectivă este oferită problemei abilităților creative a căror soluție determină condițiile vieții și activității sale eficiente într-o lume în schimbare intensă. Între timp, oportunitățile oferite de sistemul de învățământ existent pentru autorealizarea creativă a elevului sunt foarte limitate. Învățământul preuniversitar se concentrează în principal pe transmiterea cunoștințelor și parțial formarea gândirii științifice a elevilor.

Se acceptă, în general, că educația este transferul de cunoștințe, dar totuși nu există un sistem de învățare fundamentat științific care să permită combinarea autorealizării creative individuale a elevului și a ordinii publice de Stat pentru educație. Atunci când obiectivele și formele tradiționale de educație nu îndeplinesc noile cerințe ale vieții

contemporane are loc scăderea interesului școlii pentru potențialul creativ al elevilor, slăbirea motivației lor interne, hiperbolizarea valorilor educaționale formate [5].

Discuții. Metodologie. *Învățarea euristică* este cunoscută încă de pe vremea lui Socrate, care a folosit cu mare pricepere *conversația* nu pentru a furniza noile cunoștințe, ci ca mod de căutare acestea de către persoanele cu care a conversat. Pentru Socrate procesul de cunoaștere a fost traducerea cunoștințelor existente ale unei persoane dintr-o stare ascunsă într-o realitate explicită, reală și relevantă. El i-a învățat pe elevi să susțină un dialog, polemici, să gândească logic, i-a încurajat să dezvolte o *poziție argumentativă contrară*, i-a determinat să înțeleagă absurditatea afirmației originale și apoi i-a ghidat pe calea cea mai bună în căutarea adevărului. *Metoda Socratică* a fost dezvoltată și îmbunătățită. *Metoda conversației este unica metodă euristică verbală*, care se folosește și în prezent [1,15].

Euristica tradusă din grecescul *heurisko*, prezintă o metodologie a cercetării științifice, precum și o metodă de predare bazată pe descoperire sau presupunere. Etapele de dezvoltare a noțiunii de euristică sunt prezentate în Figura 1.

În *Grecia Antică* (etapa învățării prin conversații), predomina sistemul de predare bazat pe formularea întrebărilor care oferă indicații clare despre modul exact cum trebuie să răspundă interlocutorul. *Etapa modernă* se caracterizează prin aplicarea unui set de tehnici logice și reguli metodologice pentru cercetarea teoretică și aflarea adevărului, utilizarea



Figura 1. Etapele de dezvoltare a noțiunii de euristică

metodelor de predare care promovează dezvoltarea activităților de inventare. *Etapă postmodernă*, la nivel contemporan se caracterizează prin aplicarea teoriei și practicii organizării selective în *rezolvarea problemelor complexe*.

Metoda euristică prezintă o parte practică a *Conceptului Euristic*, reprezintă orice abordare a rezolvării de probleme, a învățării sau descoperirii, care utilizează tehnici practice care nu dispun de o garanție că sunt optime sau perfecte, dar suficiente pentru soluționarea obiectivelor imediate. *Învățarea euristică* este învățarea care vizează construirea propriului sens, scopului și conținutului educației unui elev, precum și procesul de organizare, diagnosticare și conștientizare a acestuia [15].

Metode aplicate. Se crede că o dificultate majoră în predare constă în de a găsi o cale pentru fiecare elev, de a crea condiții pentru dezvoltarea abilităților inerente fiecăruia. Acest lucru este considerat cel mai realizabil când se utilizează metodele euristice în predare-învățare.

În ciuda contribuției uriașe în dezvoltarea științei, majoritatea practicienilor și teoreticienilor privesc educația euristică o *ca o altă metodă de predare*. După ce am studiat și am analizat o serie de lucrări cu privire la problema utilizării învățării euristice în procesul educațional, am reușit să realizăm o analiză comparativă între euristică, problematizare, învățare personal orientată, învățare prin dezvoltare care se concentrează pe dezvoltarea abilităților fizice, cognitive și morale ale elevilor prin utilizarea potențialului și modelelor lor de dezvoltare.

Metodele euristice de predare-învățare se bazează pe calitățile creative ale elevului-inspirație, imaginație, flexibilitate a minții, capacitatea de a sesiza contradicțiile apărute, menținerea propriei opinii. *Metoda euristică*, care mai este *numită și metoda cutiei morfologice* implică găsirea ideilor noi și originale prin compilarea diferitelor combinații de elemente cunoscute și necunoscute. Analiza semnelor și conexiunilor din diferite combinații de elemente (dispozitive, procese, idei) este utilizată atât pentru identificarea problemelor, cât și pentru căutarea noilor idei [15].

În matematică, nu există reguli generale, metode și strategii didactice pentru rezolvarea oricărei probleme, în special a problemelor cu parametri, deoarece astfel de probleme sunt într-o oarecare măsură unice. **Fiecare etapă de rezolvare a problemelor cu parametri prezintă o provocare a intelectului** și generează necesitatea de realizare

și depășire a tuturor obstacolelor în dezvoltarea capacităților intelectuale. Metoda rezolvării problemelor în învățământ prezintă o modalitate de acțiune, un instrument cu ajutorul căruia elevii sub îndrumarea profesorului, sau în mod independent își însușesc și aprofundează cunoștințe și dezvoltă priceperi și deprinderi intelectuale și practice, aptitudini, atitudini etc.[1]. Considerăm că rezolvarea problemelor la matematică prezintă o activitate importantă care are bogate valențe formative, *pune la încercare capacitățile intelectuale ale personalității elevului*.

Efortul pe care îl depune elevul la rezolvarea problemelor prevede o mobilizare a proceselor psihice cognitive, volitive și motivațional-afective.

În sens general, problema la matematică poate fi definită ca **obstacol de ordin informational – cognitiv** pe care *gândirea îl întâlnește pe traiectoria sa de la o situație inițială (A) către o situație (B). Gândirea, prin operațiile logice de analiză, sinteză, comparare, abstractizare și generalizare prezintă proces cognitiv important, solicitat și antrenat în activități de rezolvare a problemelor*. Conturarea sarcinii de depășire a obstacolului cognitiv sau stabilirea unor tehnici care pot fi întreprinse depinde de categoriile de probleme propuse pentru a fi soluționate. Metodele de predare-învățare prin rezolvări de probleme pot fi clasificate după modul de administrare:

1. Metode algoritmice, bazate pe secvențe operaționale, stabile, care descriu pas cu pas metoda de rezolvare a problemei date, construite dinainte.
2. Metode euristice, bazate pe descoperire proprie și rezolvare de probleme.

Cu cercetarea rezolvării problemelor matematice cu ajutorul metodelor euristice s-au ocupat matematicienii din cele mai vechi timpuri. În dezvoltarea, promovarea și aplicarea în practică a Conceptului Euristic un rol însemnat au lucrările matematicienilor М. Балк, Л. Фридман, Г. Саранцев, М. Шуба. Conform cercetărilor efectuate pentru *rezolvarea problemelor* au fost introduse anumite procedee noi cum ar fi: *modelarea; procedeul de implicare inițială a unor probleme asemănătoare; standarde auxiliare sau rezolvate anterior; procedeul înlocuirii variabilelor; procedeul extragerii concluziei axate pe analogie; procedeul înlocuirii obiectului matematic cu unul echivalent; procedeul reformulării obiectului matematic*.

În așa mod pentru rezolvarea problemelor cu parametri pot fi evidențiate următoarele strate-

gii euristice: metoda descompunerii problemei în subprobleme elementare; metoda transformării problemei; metoda modelării; metoda introducerii elementelor auxiliare pentru rezolvarea problemei [6, 14].

Фридман Л. А a constatat că pentru rezolvarea problemelor non-standard (acestea pot fi socotite și problemele cu parametri), în cursul de matematică nu există reguli generale care afirmă rezolvarea. Mulți matematicieni au elaborat un șir de recomandări care pot fi utile în rezolvarea problemelor non-standard, problemelor cu parametri. Aceste reguli, recomandări sunt numite **reguli euristice**. Schematic întreaga cale de rezolvare a problemelor non-standard propusă de Фридман Л. se prezintă în **Figura 2**. La efectuarea unei activități intelectuale apare un raport dinamic diferit al componentelor euristice și non-euristice ale procesului de rezolvare a problemelor. Procedeurile euristice bine verificate se pot transforma în algoritmi de rezolvare a problemelor la matematică.

Se consideră că **strategiile euristice** de rezolvare a problemelor sunt posibile de aplicat numai în cazul *existenței unui mediu euristic* și unei *tensiuni intelectuale* care poate fi activată sub influența anumitor **construcții matematice euristice** de

tipul *diadelor*, de exemplu: *rațional-irațional, întreg-parte, finit-infinit, simetric-asimetric, modelare-combinare, direct-indirect etc.* Aceste *diade* servesc drept generatoare teoretice de formulare a problemelor matematice și de orientare a acestora spre o posibilă cale de rezolvare. Aceste noțiuni sunt foarte importante în formarea unor viziuni matematice și intelectuale ale elevului. O anumită rezoluție a contradicției pe care o stabilește *diada* este un concept suplimentar care transformă *diada* în *triadă*, de exemplu: *diada egal-neegal* se transformă în *triadă egal-neegal-asemenea*; *diada finit-infinit* se transformă în *triada finit-infinit-la limită*; *diada direct-indirect* se transformă în *triada direct-indirect-contradictorie*; *diada text-context* se transformă în *triada text-context-subtext etc.* Triadele oferă oportunități suplimentare în strategia de rezolvare a problemelor. Evident, cu cât sunt mai multe **construcții matematice de tipul diadelor și triadelor** cu atât mai mare este probabilitatea rezolvării problemei matematice și a dezvoltării capacităților intelectuale [9].

Rezolvarea problemelor matematice cu caracter creativ include procesul de formare a capacităților de realizare a „*dezvoltării problemei*”, care îl ajută pe elev să proiecteze noi probleme, să capete noi

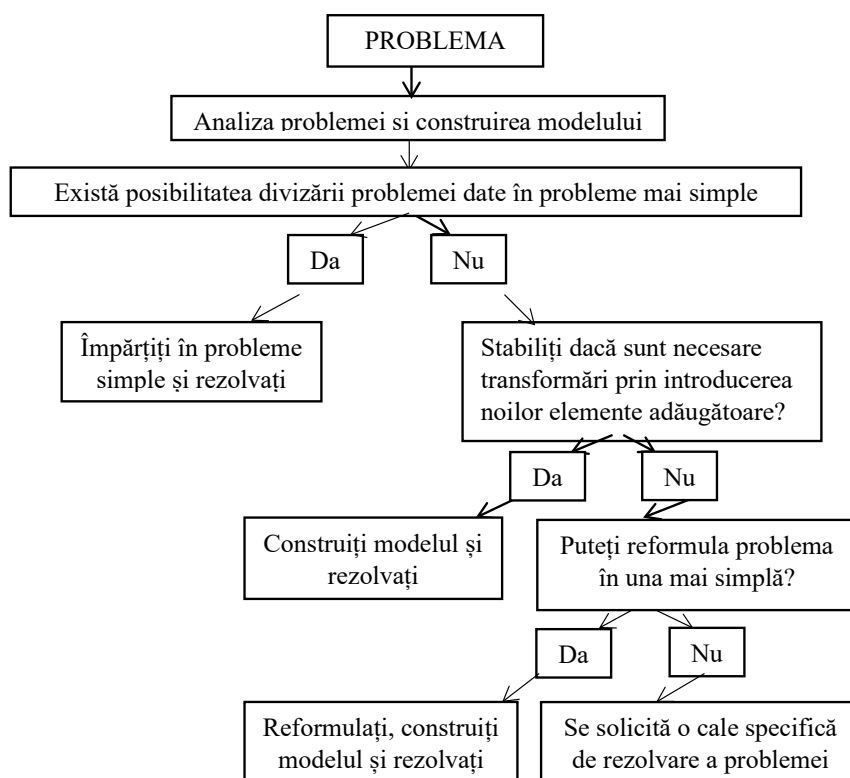


Figura 2. Calea integrală de rezolvare a problemelor non-standard propusă de Фридман [14].

cunoștințe, să stimuleze activitatea euristică și să însușească tehnologia rezolvării problemelor proiectate. Printre mijloacele de „dezvoltare a problemei”, se pot menționa următoarele: transformarea problemei; construirea unei noi probleme analogice cu cea dată, dar mai complicată; generalizarea problemei; concretizarea problemei și proiectarea problemei inverse.

Transformarea problemei. Rezolvarea problemei cu un parametru prin înlocuirea unei variabile îl determină pe elev să transforme problema inițială într-o problemă cu un nivel de complexitate diferit. Unele transformări ale problemei sunt prezentate în Tabelul 1.

Strategiile didactice euristice reprezintă strategii mintale de exploatare pentru descoperirea informației, stimulează operațiile gândirii, judecățile și raționamentele elevilor; conduc la învățare activă, conștientă. Euristica folosește sisteme operaționale flexibile, oferă oportunități de înaintare a noilor idei, versuni, de elaborare a ipotezelor și de testare eficientă a lor pe parcursul rezolvării problemelor [8]. D. Poya a identificat și a analizat multe tehnici euristice. El identifică patru faze de rezolvare a problemelor non-standard creative și tehnicile euristice care sunt distribuite între aceste faze. Ideia renumitului matematician Д. Поля că experiența matematică a unui elev nu poate fi considerată completă dacă nu a avut ocazia să rezolve și probleme compuse de el însuși rămâne actuală până în prezent [11].

Tehnicile euristice prezintă un set de acțiuni mentale și activități practice mentale utile în atingerea obiectivului stabilit. Vom considera

tehnicele euristice ca tehnici speciale care au fost formate în cursul rezolvării unor probleme și sunt transferate mai mult sau mai puțin conștient altora. Noi aderăm la poziția atribuirii tehnicilor euristice ale activității mentale generale: analiza, sinteza, compararea, abstractizarea, generalizarea, sistematizarea, stabilirea și utilizarea analogiilor, conversația euristică, descoperire prin cercetare la **tehnici euristice speciale** în rezolvarea problemelor cu parametri. Astfel, **analiza** este o acțiune mentală, în care se trece de la efect la cauza care a dat naștere acestui efect sau o acțiune mentală care merge de la ceea ce a fost dat sau stabilit mai devreme.

O formă importantă de analiză este **analiza prin sinteză**. Această formă specială de analiză prin sinteză prezintă legătura principală, **nervul principal** pentru toate activitățile mentale, inclusiv euristica. Analiza prin sinteză este cunoașterea noilor aspecte, calități și proprietăți ale obiectelor studiate prin includerea acestor obiecte într-un sistem de conexiuni și relații în care aceste noi proprietăți pot fi descoperite. Această tehnică poate fi exprimată folosind o regulă de ghidare euristică, a cărei secvență operațională este următoarea:

- determinarea scopului și direcțiilor de analiză în conformitate cu obiectivul stabilit;
- despărțirea obiectelor analizate în părți și considerarea tranziției unuia sau mai multor dintre ele într-un nou sistem de conexiuni și relații;
- stabilirea noilor proprietăți ale obiectivului original;
- corelarea fiecărei dintre proprietățile obținute ale obiectului realizat cu căutarea rezultatului și analiza acestuia.

Tabelul 1. Unele transformări ale problemelor

Nr.	Problema inițială	Varianta problemei transformate
1	Aflați toate valorile parametrului t , pentru care ecuația $(t+1) \times 4^x + 8 \times 6^x + (t-5) \times 9^x = 0$ are exact o soluție.	$p = (2/3)^x, p > 0$ Aflați toate valorile parametrului a , pentru care ecuația $(a+1)p^2 + 8p + (a-5) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă.
2	Aflați toate valorile parametrului t , pentru care ecuația $4^x + t \times 2^{x+1} + t^2 + t - 2 = 0$ are două rădăcini cu semne diferite.	$p = 2^x, p > 0$ Aflați toate valorile parametrului t , pentru care ecuația $p^2 + 2ap + a^2 + a - 2 = 0$ are două rădăcini pozitive, una din care este mai mare decât 1, iar cealaltă mai mică decât 1.
3	Aflați toate valorile parametrului t pentru care cea mai mică valoare a funcției $y = 4^x - t \times 2^{3+x} + 7t^2$ pe segmentul $[-2; 0]$ este negativă.	$p = 2^x, \frac{1}{4} \leq p \leq 1$ Aflați toate valorile parametrului p pentru care cea mai mică valoare a funcției $f(t) = t^2 - 8pt + 7t^2$ pe segmentul $[1/4; 1]$ este negativă.

Următorul exemplu de problemă prezintă utilizarea analizei prin sinteză.

Exemplul 1. Rezolvați ecuația $x^4 + 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 + \sqrt{2} = 0$.

La prima vedere, o ecuație complexă devine mai accesibilă atunci când, după analizarea condițiilor, modificăm ecuația introducând parametrul: $a = \sqrt{2}$. În așa caz ecuația în cauză devine pătratică în raport cu parametrul introdus:

$$a^2 + (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0.$$

Rezolvând această ecuație primim:

$$a = -x^2 - x - 1, a = -x^2 + x.$$

De aici ajungem la soluția finală a următoarelor ecuații:

$$-x^2 - x - 1 = \sqrt{2} \quad \text{și} \quad -x^2 + x = \sqrt{2}.$$

Analiza și sinteza sunt deosebit de importante în activitatea euristică, deoarece abilitatea de analiză este una din cele mai semnificative tehnici de gândire umană.

Pentru organizarea deplină a activității euristice este necesară **efectuarea descoperirii prin cercetare**. Majoritatea problemelor de cercetare sunt sarcini mici de căutare, care necesită parcurgerea tuturor etapelor procesului de cercetare. Aceste sarcini sunt: observarea și studiul faptelor, identificarea fenomenelor necunoscute care alcătuiesc obiectivul cercetării (enunțul problemei), promovarea ipotezelor, construirea unui plan, verificarea unei soluții, aplicarea practică a rezultatelor. Deoarece problemele matematice cu parametri formează abilități educaționale și de cercetare într-o măsură mai mare, vom examina următoarea problemă:

Exemplul 2. La ce valori ale parametrului sistemul de ecuații are o singură rezolvare? [12].

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Această problemă poate fi rezolvată prin mai multe metode:

1. Din prima ecuație exprimăm z prin x și y și introducem expresia pentru z prin x și y în a doua ecuație. În rezultat obținem o ecuație pătrată în raport cu x și cercetăm discriminantul acestei ecuații.

2. Observăm că prima ecuație reprezintă ecuația planului ce intersectează axele de coordonate în punctele $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$, iar a doua ecuație reprezintă o suprafață sferică cu centrul

în originea coordonatelor O și raza egală cu $\sqrt{3}$.

Pentru determinarea unicului punct comun a planului cu suprafața sferică este suficient să comparăm raza sferei cu distanța de la centrul ei până la plan. Această comparație poate fi efectuată fără a apela la geometrie analitică, deoarece este suficient să determinăm înălțimea piramidei $OABC$ coborâtă din vârful O .

La rezolvarea acestei probleme, elevii dezvoltă abilitatea de a rezolva o problemă prin mai multe moduri, are loc formarea următoarelor abilități: **abilități de a construi o nouă metodă** din cele studiate anterior; **abilitatea de a aplica o tehnică auxiliară**; **abilitatea de a aplica soluție non-standard**.

Vom lua în considerare o problemă de tip cognitiv folosind exemplul familiarizării elevilor cu metoda coordonată parametrică de rezolvare a unei ecuații cu un parametru. Acest exemplu i-a motivat pe elevi să fie activi, fiind propus spre rezolvare la examenul EĞT în anul 2018 [10].

Exemplul 3

De aflat pentru care valori a parametrului a ecuația $\sqrt{x^2 + 6x + 5} = \sqrt{a - 6x}$ are exact o rădăcină negativă.

Soluție. Acest exemplu a fost propus elevilor după studierea temei "Rezolvarea ecuațiilor iraționale". Elevii au înlocuit ecuația dată cu sistemul echivalent.

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -5] \cup [-1; +\infty), \\ x^2 + 12x + 5 - a = 0. \end{cases}$$

Din partea profesorului urmează întrebările euristice, care conduc activitatea de gândire și cercetare a elevilor:

1) S-a schimbat oare calitatea ecuației în urma transformării echivalente? Da, ecuația irațională a fost înlocuită cu ecuație pătrată.

2) Formulați întrebarea referitor la noua problemă. (De aflat valorile parametrului a pentru care ecuația are exact o rădăcină negativă pe intervalele

$$(-\infty; -5] \text{ și } [-1; +\infty)$$

3) Câte necunoscute sunt în ecuația dată? Ce reprezintă soluția problemei în acest caz?

4) Unde poate fi reprezentată perechea ordonată de numere (x, a) ? Ce trebuie de făcut în acest caz? (Într-un sistem rectangular de coordonate xOa trebuie o variabilă exprimată prin cealaltă).

5) Faceți acest lucru. Elevii construiesc parabola $a = x^2 + 12x + 5$ și indică locul geometric de puncte a planului de coordonate ce corespunde inegalităților.

6) Elevii determină analitic valorile parametrului:

$$a = -31, a(-5) < a < a(-1), a \geq a(0) \text{ și}$$

obțin răspunsul.

Răspuns: $\{-31; (-30; -6); [5; +\infty)\}$

Ca urmare a rezolvării acestei probleme euristice, elevii de liceu descoperă o nouă metodă de rezolvare a problemelor cu parametri care în viitor poate fi aplicată pentru rezolvarea altor probleme, precum și o motivație sporită pentru studierea matematicii.

Pentru a căuta informații despre un eveniment sau obiect sunt setați următorii parametri, care și alcătuiesc întrebările cheie: Cine? Ce? Pentru ce? Unde? Cu ce? Cum? Când? Aceste întrebări generează idei și soluții neobișnuite cu privire la obiectul studiat. Astfel de întrebări sunt de obicei folosite în timpul *organizării dialogului Socratic*, în timpul căruia elevii „descoperă prin cercetare” adevărul.

Problemele cu parametri dețin potențial ridicat pentru dezvoltarea abilităților de cercetare ale elevilor. Introducerea unui parametru formează subiecte și *abilități intelectuale*, dezvoltă *abilități de cercetare* a elevilor. Vom urmări metoda de rezolvare a unei probleme [4,7].

Exemplu 4. Doi muncitori îndeplinesc împreună un anumit lucru. Dacă primul lucrător lucrează timp de 2 ore, apoi împreună timp de 3 ore, ei îndeplinesc un volum de 75% din toată munca. De cât timp au nevoie ambii muncitori pentru a finaliza toată munca împreună? [8].

Soluția și studiul unei astfel de probleme implică formularea unei ecuații și poate fi construită în conformitate cu următorul plan de acțiune:

1. *Analiza condițiilor.* Stabilirea relației dintre datele problemei și mărimile necunoscute, selectarea unui parametru, compunerea unei ecuații (adică modelarea). În această etapă, poate fi organizat un dialog euristic și vor fi dezvăluite abilități precum efectuarea de cercetări matematice, folosind proceduri de întrebări și răspunsuri, prezentarea și fundamentarea ipotezelor.

2. *Rezolvarea ecuației* (sistemului de ecuații). Alegerea metodei pentru rezolvarea ecuației cu parametri, găsirea rădăcinilor ecuației.

3. *Investigarea soluției problemei.* Elevul este obligat să stabilească valorile admise ale mărimilor dorite și date și relația dintre ele în funcție de condițiile problemei. Determinarea valorilor rădăcinilor valabile pentru ecuația dată, pentru a investiga care dintre rădăcini și la ce valori ale parametrului îndeplinesc condițiile problemei. Astfel, vor fi dezvoltate abilitățile de a efectua un experiment pentru a stabili caracteristicile unui obiect matematic și a analiza rezultatele cercetării.

Soluție:

Analiza. Organizarea dialogului euristic.

- Despre ce fel de proces vorbim? (colaborare);
- Ce trebuie să găsim? (limitele valorilor timpului de finalizare a lucrărilor);
- Cât timp lucrează primul muncitor singur? (2 ore);
- Cât timp lucrează muncitorii împreună? (3 ore);
- Ce volum de lucru au îndeplinit? (75%);
- Este cunoscută productivitatea specifică a primului muncitor? Dar la al doilea muncitor?

Construirea modelului matematic al situației date:

$$\begin{cases} t(p_1 + p_2) = 1, \\ 2p_1 + 3(p_1 + p_2) = 0,75. \end{cases}$$

Unde p_1 și p_2 - productivitatea reală a muncii primului și respectiv, a celui de-al doilea muncitor, t - timpul necesar pentru ca cei doi lucrători să finalizeze toată munca împreună (în ore).

Rezolvarea sistemului de ecuații. Din a doua ecuație a sistemului:

$p_1 = 0,15 - 0,6p_2$ exprimând t din prima ecuație primim: $t = 0,15 + 0,4p_2$

În funcție de semnificația problemei $p_1 > 0, p_2 > 0$. Atunci $0,15 - 0,6p_2 > 0$, prin urmare, $p_2 < 0,25$.

Investigarea soluției problemei. Se sugerează ideea cercetării privind în considerare continuitatea ei:

$t = 0,15 + 0,4p_2$, Elevii construiesc graficul funcției și notează valorile funcției pentru $t \in (0; 0,25)$

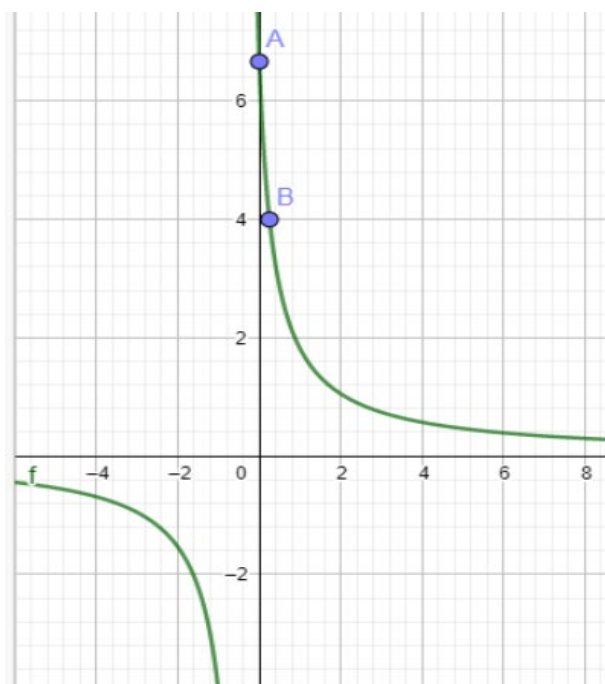


Figura 3. Construirea graficului funcției cu notarea valorilor

Folosind o soluție analitică, obținem o estimare mai precisă a modificării parametrului:

$t \in (4; 6^3)$. Următorul pas poate fi dezvoltarea în continuare a sarcinii introducând un alt parametru. De exemplu, lucrând împreună, lucrătorii efectuează $a\%$ din tot volumul de lucrări. Atunci $a \in (0; 100)$.

Modelul matematic al situației se modifică în felul:

$$\begin{cases} t(p_1 + p_2) = 1, \\ 2p_1 + 3(p_1 + p_2) = k \cdot \frac{a}{100} \end{cases}$$

Unde: $k = \frac{1}{\frac{k}{5} + 0,4p_2}$; $k \in (0; 1)$; $t =$

O atenție deosebită ar trebui acordată studierii limitelor variabilei p_2 .

$p_1 > 0, p_2 > 0$: din a două ecuație $p_1 = k/5 - 0,6p_2$.
 $k/5 - 0,6p_2 > 0$; $p_2 < k/3$; $p_2 < 1/3$

Monitorizarea schimbării valorii t la modificarea parametrului k se urmărește după Figura 4.

Răspuns: Dacă în anumite condiții lucrătorii efectuează 100% din muncă, atunci timpul pentru executarea sa comună poate dura de la trei la cinci ore.

Observăm că este important și util să luăm în considerare problemele cu parametri ca o

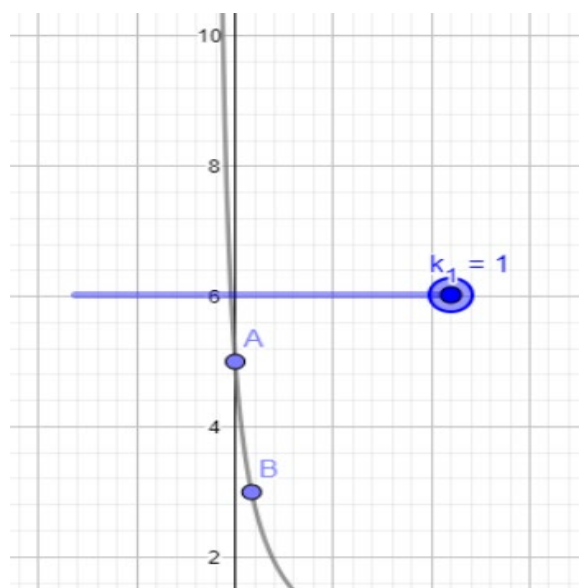


Figura 4. Monitorizarea modificării valorii t

modalitate de generalizare a conceptelor și sarcinilor matematice. Introducerea parametrului permite o înțelegere mai profundă a sarcinii.

Utilizarea generalizării în mai multe etape oferă elevilor posibilitatea de a formula singuri probleme, pentru cazul general, acordând atenție faptului că folosind generalizări, dintr-o sarcină pot fi obținute și rezolvate mai multe sarcini. Prin introducerea parametrilor în locul oricăror date numerice, elevul devine cercetător. El trebuie să analizeze toate soluțiile posibile la această problemă, valorile posibile ale parametrilor pe care îi pot lua [2,3].

Exemplul 5. Prin extremitățile segmentului PN și mijlocul lui Q sunt duse drepte paralele, care intersectează un plan oarecare în punctele P_1, N_1, Q_1 . De aflat lungimea segmentului QQ_1 , dacă segmentul PN nu intersectează planul și dacă $PP_1 = 21\text{cm}$, $NN_1 = 15\text{cm}$.

În condițiile problemei pot fi variate lungimile segmentelor PP_1 și NN_1 cât și raportul $PQ:QN$. Constante se păstrează proiectarea paralelă și condiția că segmentul PN nu intersectează planul. La început, sarcina poate fi generalizată prin înlocuirea parametrilor a și b cu valorile numerice corespunzătoare de 21cm și 15cm. O altă modalitate de a generaliza poate fi schimbarea condiției „punctul Q este mijlocul segmentului” prin condiția „punctul Q împarte segmentul PN în raportul $n:m$.”

O astfel de tehnică euristică are următoarea compoziție operațională:

1. Selectați date numerice specifice și le introduceți în problemă;
2. Introduceți parametrii în întregime sau parțial în locul lor;
3. Formulați o sarcină generalizată;
4. Analizați valorile posibile ale parametrilor;
5. Analizați soluția problemei.

Tehnica inventării prezintă o modalitate de a crea un produs necunoscut anterior elevilor ca urmare a activităților lor creative specifice. Implementarea acestei tehnici necesită următoarele:

1. Înlocuirea calităților unui obiect cu calitățile altuia pentru a forma un obiect nou;
2. Căutarea proprietăților unui obiect într-un alt mediu;
3. Schimbarea unui element al obiectului studiat și descrierea proprietăților unui obiect nou, modificat.

Această metodă are importanță deosebită în procesul de alcătuire de către elevi a noilor probleme, în timp ce este necesar să se schimbe elementele în formularea noii sarcini sau să se producă niște modificări în problema inițială [12].

Rezultate și discuții

Evaluarea capacităților intelectuale la elevi prin aplicarea metodelor euristice de rezolvare a problemelor cu parametri prezintă un proces complex care implică mai multe aspecte.

Cu scopul cercetării atitudinii elevilor față de utilizarea tehnicilor euristice în rezolvarea problemelor cu parametri s-a realizat un chestionar pe un eșantion de 100 elevi din liceul Orizont, municipiul Chișinău.

Rezultatele chestionării denotă că 44 % din respondenți menționează o implicare activă în rezolvarea problemelor cu parametri la lecțiile de matematică, 19 % nu rezolvă de loc astfel de probleme; 63 % consideră că problemele cu parametri sunt importante și foarte importante pentru învățarea matematicii; 23 % din elevi menționează că se simt pregătiți pentru a rezolva așa probleme, 25 % se simt îngrijorați, consideră drept dificultăți: aplicarea

formulelor, găsirea valorilor parametrilor lipsă de practică în rezolvarea problemelor cu parametri. Elevii propun o abordare interactivă cu mai multe exemple explicate în timpul orelor, rezolvate pas cu pas prin colaborare cu alți elevi.

Această chestionare stabilește corectitudinea, direcția formării și dezvoltării abilităților intelectuale ale elevilor prin rezolvarea problemelor cu parametri utilizând metode și tehnici euristice.

Cu scopul evaluării eficienței procesului de dezvoltare a capacităților intelectuale a elevilor s-a petrecut **monitorizarea activității intelectuale a elevilor** pe parcursul rezolvării problemelor cu parametri după M. Stupnițcaia [13]. Fila de observare a activității intelectuale a elevilor în timpul rezolvării problemelor include: percepția, prelucrarea intelectuală a informației cu aprecierea eficacității activității intelectuale în această direcție; stabilirea abilităților intelectuale organizaționale și de comunicare pe parcursul rezolvării problemelor cu parametri. Aprecierea elevilor s-a efectuat pe niveluri: nivelul inferior 8-13; nivelul mediu 14-20 și nivelul superior 21-26 puncte. Rezultatele obținute conform observațiilor efectuate sunt indicate în Tabelul 2.

Concluzii. Activitatea de bază în cadrul orelor de matematică rămâne și în continuare rezolvarea problemelor-una din cele mai sigure căi ce duc la dezvoltarea gândirii, imaginației, atenției și spiritului de observație al elevilor. Această **activitate pune la încercare în cel mai înalt grad abilitățile intelectuale ale elevilor, le solicită acestora toate dispoibilitățile psihice, în special inteligența**. Problemele cu parametri deschid un domeniu larg de activitate în ceea ce privește dezvoltarea abilităților intelectuale ale elevilor. Rezolvarea sistemică a problemelor cu parametri contribuie la înțelegerea semnificației practice a matematicii ca aparat pentru studierea și cercetarea legăturilor dezvoltării lumii care ne înconjoară. Utilizarea metodelor și tehnicilor euristice în rezolvarea problemelor cu parametri conduce la activizarea procesului de predare a matematicii în condiții de orientare către formarea

Tabelul 2. Aprecierea activității intelectuale a elevilor în timpul activității de rezolvare a problemelor cu parametri

Nivelurile	Percepția, prelucrarea intelectuală a informației, eficacitatea activității intelectuale, (elevi/%)	Abilitățile intelectuale organizaționale, (elevi/%)	Abilitățile de comunicare, (elevi/%)
1 (inferior)	15/30	21/44	17/34
2 (mediu)	25/50	20/40	23/46
3 (superior)	10/20	9/18	10/20

și dezvoltarea intelectuală a personalității elevului. Direcțiile și subiectele care decurg din cercetarea efectuată necesită o dezvoltare ulterioară: dezvoltarea și susținerea metodologică a diferitor forme de predare a matematicii folosind construcții euristico - didactice ca program de gestionare a activității euristice a elevilor; crearea metodicilor

și tehnologiilor pentru activitatea euristică a studenților, viitori specialiști în diverse domenii ale cunoașterii; pregătirea profesorilor de matematică și a studenților universităților pedagogice pentru a fi capabili de a organiza și gestiona activitățile euristice ale elevilor; dezvoltarea tehnologiei pentru predarea euristică la distanță a matematicii.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE:

1. BOCOȘ M. *Teoria și metodologia instruirii teoria și metodologia evaluării*. București: Paralela 45. 2017. 216 p. ISBN 978-973-472-4840.
2. CALMUȚCHI L. *Metodologia rezolvării ecuațiilor și inecuațiilor cu parametri*. Chișinău: UST, 2010, 221 p. ISBN 978-9975-76-155-0.
3. CALMUȚCHI L. *Metodologia rezolvării problemelor cu parametri*. Chișinău: UST, 2016, 284 p. ISBN 978-9975-76-155-0.
4. CALMUȚCHI L. TURAN, O. *Methodology for solving problems with parameters*. Chișinău: Pulsul Pieții. 2022, 137 p. ISBN 978-9975-63-518-9.
5. *Curriculum național. Disciplina Matematica. Clasele a X-a -XII-a*. Chișinău: Lyceum, 2019. ISBN 978-9975-3438-6-2.
6. LUPU I. *Metodologia rezolvării problemelor de matematică cu un grad sporit de dificultate*. Chișinău: Editura Combinatul poligrafic, 2011, 224p., ISBN 978-9975-54-032-2.
7. TURAN O. *Dezvoltarea abilităților intelectuale la elevi prin rezolvarea problemelor cu parametri*. Acta et Commentationes, Sciences of Education. Chișinău: nr.3(37), 2024. p.85-96. ISSN 1857-0623. E-ISSN2587-3636.
8. ДАЛИНГЕР В. *Методика обучения математике. поисково-исследовательская деятельность учащихся*. Москва: Издательство Юрайт, 2020. 460 с. ISBN 978-5-534-04755-4.
9. КЛЕПНИКОВ В. *Эвристические методы решения задач в современной школе*. //Педагогика. - 2017. N 3.-с. 49-56.
10. МИРОШИН В. *Решение задач с параметрами*. Москва: Издательство Экзамен, 2009. 286 с. ISBN 978-5-377-02250-3.
11. ПОЙА Д. *Как решать задачу: Пособие для учителей* / Пер. с англ. В. Звонарёвой и Д.Белла; Под ред. Ю. Гайдука. — Изд. 2-е. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207 с.
12. СКАФА Е. *Эвристическое обучение математике: теория, методика, технология*. Монография. – Донецк: ДонНУ, 2004. 439 с. ISBN 966-639-171-6.
13. СТУПНИЦКАЯ М. *Диагностика уровня сформированности общеучебных умений и навыков школьников*. журнал «Школьный психолог», №7, 2006.
14. ФРИДМАН Л., ТУРЕЦКИЙ Е. *Как научиться решать задачи*. Москва: Просвещение, 1984. 183 с. ISBN 5-09-000596-6.
15. ХУТОРСКОЙ А. *Развитие одарённости школьников*. Методика продуктивного обучения. Пособие для учителя. Москва, 2000. 320 с. ISBN 5-691-00577-4.