

<https://doi.org/10.52387/1811-5470.2025.3.14>
CZU: 37.015/.091:373:510

FORMAREA DEPRINDERILOR DE CERCETARE ALE ELEVILOR DOTĂȚI INTELECTUAL PRIN REZOLVAREA PROBLEMELOR CU PARAMETRI LA MATEMATICĂ

Laurențiu CALMUȚCHI,

doctor habilitat, profesor universitar,
Universitatea de Stat „Alec Russo”, Bălți, RM

ORCID: 0000-0001-6665-7927

E-mail: lcalmutchi@gmail.com

Ozkan TURAN,

doctorand, Catedra Matematică și Fizică,
Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă”, Chișinău, RM

<https://orcid.org/0000-0002-4571-2015>

E-mail: ozkanturan@orizont.md

Rezumat. Formarea deprinderilor de cercetare la elevi prezintă una din direcțiile principale, metodologice a învățământului preuniversitar. În articol sunt propuse probleme cu parametri, cu grad sporit de dificultate, care pot constitui suport științific și didactic în activitățile de formare a deprinderilor de cercetare cu elevii dotați la matematică. Scopul major al educației matematice în perioada liceală este atât formarea și dezvoltarea gândirii logice, cât și a competențelor școlare necesare pentru edificarea personalității absolventului liceului pentru a-i permite accesul la următoarea treaptă a învățământului și/sau integrarea socială a acestuia. Dotarea intelectuală reprezintă un grad superior mediei convenționale de dezvoltare a aptitudinilor generale sau specifice, care presupune experiențe de învățare diferențiate prin volum și profunzime de experiențele obișnuite furnizate de școală. Relevanța cercetării constă în descoperirea unor modalități de utilizare sistematică a cercetării în procesul de predare a matematicii prin rezolvarea problemelor cu parametri. Rezolvarea problemelor cu parametri necesită cercetare, chiar dacă acest cuvânt nu este menționat în formularea problemei. Problemele cu parametri sunt importante în formarea și în îmbunătățirea competențelor subiectului, în dezvoltarea culturii matematice. Problemele cu parametri poartă caracter exploratoriu, iar acest lucru este asociat cu semnificația metodologică a acestui tip de probleme, cât și cu dificultățile de dezvoltare a deprinderilor de cercetare a elevului. Dezvoltarea abilităților de cercetare este imposibilă în afara situațiilor problematice, prin urmare problemele non-standard, problemele cu parametri au o deosebită importanță în învățarea cu succes a matematicii. În acest context, realizarea formării și dezvoltării deprinderilor de cercetare prin rezolvare de probleme cu parametri devine un proces specific mai cu seamă la rezolvarea problemelor geometrice. Sunt evidențiate câteva recomandări pentru profesorii de matematică, care necesită a fi respectate la rezolvarea problemelor cu parametri.

Cuvinte-cheie: Probleme cu parametri, deprinderi de cercetare, metode de rezolvare, a învăța să înveți, etape de rezolvare, elevi dotați intelectual.

FORMATION OF RESEARCH SKILLS IN INTELLECTUALLY GIFTED STUDENTS BY SOLVING PROBLEMS WITH PARAMETERS IN MATHEMATICS

Abstract. The development of research skills in students represents one of the main methodological directions of pre-university education. This article presents parameter-based problems of increased difficulty, which can serve as both scientific and didactic support in activities aimed at cultivating research skills in mathematically gifted students. The primary goal of mathematical education during high school is not only to shape and develop logical thinking but also to build the academic competencies necessary for the formation of the graduate's personality, enabling access to the next level of education and/or their social integration. Intellectual giftedness represents a level above the conventional average in the development of general or specific aptitudes, requiring learning experiences that differ in volume and depth from the typical experiences provided by the school. The relevance of the research lies in the discovery of ways to systematically use research in the process of teaching mathematics by solving problems with

parameters. Solving problems with parameters requires, even if this word is not mentioned in the formulation of the problem. Problems with parameters are important in the formation and improvement of the subjects skills in the development of mathematical culture. Problems with parameters are exploratory in nature, and this is associated with the metodological significance of this tupe of problems, as with the diffiulties of developing research skills. The development of research skills is imposible outside of problem situations, therefore non—standart problems, problems with parameters are of particular impotance in the successful learning of mathematics. In this context, the development of research skills through solving parameter-based problems becomes a specialized process, especially when addressing geometric problems. The article also outlines several recommendations for mathematics teachers that should be followed when working on parameter-based problems.

Keywords: *problems with parameters, research skills, stages of solving, methods of solving, learn to learn, intellectually gifted students.*

Introducere. Trecerea la epoca tehnologiilor moderne este imposibilă fără păstrarea și creșterea potențialului intelectual și uman al țării. Acest lucru, la rândul său, a dus la o creștere semnificativă a interesului pentru evoluțiile științifice fundamentale în domeniul pedagogiei și psihologiei supradotării: crearea de *noi modele care vizează identificarea condițiilor psihologice și pedagogice, a mecanismelor de dezvoltare a dotării intelectuale*, precum și a cercetării orientate spre practică, testarea practică și introducerea diferitor metode de evaluare, formare și dezvoltare a talentelor matematice.

Educația are ca finalitate principală formarea unui caracter integru și dezvoltarea unui sistem de competențe care include cunoștințe, abilități, atitudini și valori ce permit participarea activă a individului în viața socială și economică.

Scopul major al educației matematice în perioada liceală este atât formarea și dezvoltarea gândirii logice, cât și a competențelor școlare necesare pentru edificarea personalității absolventului liceului pentru a-i permite accesul la următoarea treaptă a învățământului și/sau integrarea socială a acestuia.

Introducerea parametrului în conținuturile matematice preuniversitare a contribuit la apariția unor genuri noi de probleme, a dat viață nouă unor tipuri tradiționale de probleme, cum ar fi rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor. În cadrul rezolvării celor mai simple probleme cu parametru, elevilor li se propune nu o singură ecuație, ci o „familie întreagă” de ecuații [6].

Discuții, metodologie. Problemele cu parametri sunt apreciate ca cele mai dificile din cursul de matematică preuniversitar, principalele motive, desigur, sunt dificultățile determinate de specificul activității în sine pentru a rezolva aceste probleme: non-ritmul acesteia, necesitatea de utilizare integrată a cunoștințelor și abilităților, transferându-le în condiții noi.

„Ce înseamnă să stăpânești matematica? A stăpâni matematica este capacitatea de a rezolva probleme și nu numai din cele standarde, dar și probleme care necesită o anumită independență de gândire, originalitate, inventivitate. Prin urmare, cea mai importantă cerință a cursului de matematică din școală este de a sublinia latura metodologică a procesului de rezolvare a problemelor” [6,7].

„Dotarea intelectuală” reprezintă un grad superior mediei convenționale de dezvoltare a aptitudinilor generale sau specifice, care presupune experiențe de învățare diferențiate prin volum și profunzime de experiențele obișnuite furnizate de școală.

Comportamentul aptitudinal înalt, adică elevii dotați intelectual îmbină trei caracteristici umane fundamentale:

1. Capacități intelectuale care depășesc nivelul mediu.
2. Nivel înalt de creativitate.
3. Nivel înalt de angajare în sarcinile propuse.

Copii dotați intelectual se confruntă cu anumite greutăți din cauza orientării programelor de învățământ către elevul mediu ca urmare a unificării excesive a programelor școlare, în care oportunitățile de învățare individuală a elevului sunt slab orientate.

Apreciind eficacitatea programelor de studiu pentru copii dotați intelectual se accentuează următoarele:

- ♦ Formarea accelerată a deprinderilor de bază prin reorganizarea programei de lucru în conformitate cu un nivel mai ridicat de cunoștințe și dezvoltare a elevilor dotați intelectual;
- ♦ Includerea elevilor în activități active pentru dezvoltarea și soluționarea problemelor în activități de cercetare;
- ♦ A oferi elevilor posibilitatea de a stabili conexiuni în cadrul sistemului de cunoaștere propus, concentrându-se pe idei și subiecte-cheie [7].

Important este lipsa elaborării metodologiei de introducere a conceptelor teoretice legate de problemele cu parametri și, ca urmare, apelul profesorilor la baza senzorială a acțiunilor, care se exprimă, de exemplu, propozițiile: „imaginați-vă că un parametru este un număr specific, dar nu uitați că este o variabilă”, „uneori este convenabil să luați în considerare ecuația cu parametru ca funcție”, „pentru rezolvarea problemelor este necesar să alegeți controlul valorii parametrului în așa fel încât soluția ecuației (inecuației) să se supună algoritmului la intervalele obținute, dar este imposibil să le găsiți imediat”.

Un alt motiv este eficiența scăzută a metodologiei de predare bazată pe gruparea sarcinilor pe tipuri de sarcini (liniare, pătratice, raționale, fracționare-raționale, iraționale, trigonometrice, logaritmice, exponențiale), deoarece în acest caz strategia de decizie pentru tipul de expresie este determinat incorect. De exemplu, schimbând doar poziția unui parametru în structura unei ecuații liniare, ajungem la trei strategii diferite pentru rezolvarea acestuia („transformare secvențială”, „studiu de integral”, „factorizare”).

Rezolvarea problemelor este un proces extrem de complex, în descrierea căruia este imposibil să epuizăm toată varietatea laturilor sale. Este imposibil să le oferim elevilor reguli care să le permită să rezolve orice problemă non-standard, deoarece ele sunt într-o oarecare măsură unice, și din păcate, nu există o metodă universală care să le permită să rezolve orice problemă. Chiar și respectarea strictă a instrucțiunilor și sfaturilor profesorului nu va putea ajuta. Problemele cu dificultate crescută (problemele cu parametri), servesc o punte de tranziție de la activitatea în timpul lecției la cea extracurriculară, servesc drept material bun pentru identificarea celor mai capabili elevi.

Scopul acestei lucrări constă în specificul organizării și realizării procesului de formare a deprinderilor de cercetare prin rezolvare de probleme cu parametri cu elevii dotați intelectual la matematică.

Pentru realizarea scopului cercetării au fost propuse obiectivele: cercetarea și analiza bibliografiei privitor la organizarea activităților extracurriculare cu rezolvarea problemelor cu parametri; efectuarea unei analize metodologice a poziției problemelor cu parametri în cursul de matematica preuniversitară; dezvoltarea unui cadru conceptual în ce privește rolul problemelor cu parametri în formarea deprinderilor de cercetare a elevilor la orele de cla-

să și a lucrului diferențiat cu elevii dotați intelectual în afara orelor de curs; selectarea și sistematizarea principalelor tipuri de probleme cu parametri precum și a metodelor lor de rezolvare; elaborarea unei tehnologii de predare specifice care ar permite ca problemele cu parametri să devină o parte integrantă a subiectelor matematicii preuniversitare.

În continuare vă propunem unele probleme cu grad sporit de dificultate, care în același timp sunt și problemele cu parametri, care au fost rezolvate cu elevii din liceul „Orizont”, municipiul Chișinău.

Exemplul 1. Pentru ce valori a parametrului t ecuațiile

$$2x^2 - (3t + 2)x + 12 = 0 \text{ și}$$

$$2x^2 - (3t + 2)x + 12 = 0 \text{ și}$$

$$4x^2 - (9t - 2)x + 36 = 0$$

$$4x^2 - (9t - 2)x + 36 = 0$$

au o rădăcină comună?

Soluție. Cunoaștem, că în cazul când pentru o valoare a parametrului t , ambele ecuații au rădăcina comună x_1 , atunci perechea (x_1, t_1) este soluție a sistemului format din aceste două ecuații. Așa dar, trebuie să determinăm soluția sistemului format din aceste două ecuații:

$$\begin{cases} 2x^2 - (3t + 2)x + 12 = 0, \\ 4x^2 - (9t - 2)x + 36 = 0. \end{cases}$$

Pentru a rezolva așa sistem, alcătuim ecuația în care lipsește termenul liber. Cu acest scop înmulțim prima ecuație la (-3) și adunăm cu a doua ecuație. În rezultat obținem ecuația:

$$-2x^2 + 8x = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații sunt $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Prima valoare nu poate fi soluție a sistemului, deoarece în așa caz prima ecuație se transformă în $12 = 0$. Dacă înlocuim valoarea $x = 4$ în prima ecuație, Obținem:

$$32 - 4(3t + 2) + 12 = 0$$

$$32 - 4(3t + 2) + 12 = 0,$$

$$-12t + 36 = 0 \Rightarrow -12t + 36 = 0$$

și $t = 3$. Dacă înlocuim valorile $x = 4$ și $t = 3$ în a doua ecuație obținem o identitate adevărată.

Răspuns: $t = 3$

Exemplul 2. Pentru fiecare valoare a parametrului t de rezolvat ecuația

$$|\cos x| - t \cos x = 5.$$

Soluție. Observăm că ecuația dată este echivalentă cu totalitatea a două sisteme

$$|\cos x| - t \cos x = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \geq 0 \\ (1-t)\cos x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x < 0 \\ (-1-t)\cos x = 5 \end{cases}$$

Să cercetăm primul sistem:

$$\cos x = \frac{5}{1-t} \cos x = \frac{5}{1-t} \text{ cu condiția } 0 \leq \frac{5}{1-t} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{5}{1-t} \leq 1.$$

Rezolvând această inecuație dublă obținem $t \leq -4t \leq -4$. Pentru valorile parametrului $t \leq -4t \leq -4$, avem:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{5}{1-t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{5}{1-t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Pentru al doilea sistem:

$$\cos x = -\frac{5}{1+t} \cos x = -\frac{5}{1+t} \text{ cu condiția}$$

$$-1 \leq -\frac{5}{1+t} < 0 \Rightarrow -1 \leq -\frac{5}{1+t} < 0, \text{ adică } t \geq 4$$

$$t \geq 4. \text{ Pentru valorile parametrului } t \geq 4t \geq 4, \text{ obținem:}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{5}{1+t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{5}{1+t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Răspuns:

Pentru $t \leq -4t \leq -4$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{5}{1-t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{5}{1-t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

pentru $-4 < t < 4-4 < t < 4$,

ecuația n-are soluții;

pentru $t \geq 4t \geq 4$,

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{5}{1+t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = \pm \arccos\left(-\frac{5}{1+t}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplul 3 [5]. De aflat toate valorile parametrului a pentru care ecuațiile $\sin x + \cos x = 1$ și $\cos \frac{x}{2} = a \cos \frac{x}{2} = a$ au măcar o rădăcină comună.

Soluție. Dacă $\cos \frac{x}{2} = a \cos \frac{x}{2} = a$, atunci $\cos x = 2a^2 - 1$ și $\cos x = 2a^2 - 1$.

Înlocuim expresia $2a^2 - 1$ în ecuația $\sin x + \cos x = 1$ și obținem: $\sin x = 2 - 2a^2$.

Introducem expresiile obținute pentru $\sin x$ și $\cos x$ în identitatea trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obținem o ecuație în raport cu a :

$$(2 - 2a^2)^2 + (2a^2 - 1)^2 = 1$$

$$(2 - 2a^2)^2 + (2a^2 - 1)^2 = 1.$$

Facem substituția $t = 2a^2$ și după transformări simple obținem ecuația $t^2 - 3t + 2 = 0$, care are rădăcinile $t = 1$ și $t = 2$.

Pentru $t = 1$, obținem $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar pentru $t = 2$, avem $a = \pm 1$. Până ce încă nu putem să dăm răspunsul deoarece la trecerea de la ecuația $\cos \frac{x}{2} = a \cos \frac{x}{2} = a$ la ecuația $\cos x = 2a^2 - 1$ noi de fapt am trecut de la o ecuație la consecința ei. Analogic s-a întâmplat și la trecerea de la ecuațiile

$$\cos x = 2a^2 - 1$$

$$\text{și } \sin x = 2 - 2a^2$$

$$\text{la ecuația } (2 - 2a^2)^2 + (2a^2 - 1)^2 = 1.$$

$$(2 - 2a^2)^2 + (2a^2 - 1)^2 = 1.$$

Astfel, am avut posibilitatea de a obține rădăcini străine pentru valorile parametrului a . Acum este necesar să ne încredințăm că pentru fiecare valoare determinată pentru parametrul a , există x ce satisface ambele ecuații.

Verificăm: pentru $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ așa valoare x există ($x = \frac{5\pi}{2}$); pentru $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = -1$ și $a = 1$ obținem corespunzător $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 2\pi$, $x = 0$.

Prin urmare, toate valorile obținute pentru parametrul a satisfac condiției din ecuație.

$$\text{Răspuns: } -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1; 1.$$

Exemplul 4. De aflat toate valorile parametrului t , pentru care perimetrul figurii determinate pe planul de coordonate de condiția $\log_{2-|ty|} \left(\frac{t^2+x^2}{2t^2} \right) > 0$ va fi minimal.

Soluție. Observăm, că baza logaritmului este mai mică decât unitatea și prin urmare, inecuația inițială este echivalentă cu sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} 2 - |ty| > 0 \\ \frac{t^2+x^2}{2t^2} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - |ty| > 0 \\ \frac{t^2+x^2}{2t^2} < 1 \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem:

$$|x| < |t|, |y| < \frac{2}{|t|}|x| < |t|, |y| < \frac{2}{|t|}.$$

Prin urmare, figura despre care se spune în condiția problemei reprezintă un dreptunghi cu centrul în originea de coordonate, laturile căruia au lungimile de $2|t|$ și $\frac{4}{|t|}$, fiind paralele la axele de coordonate. Prin urmare, în așa condiții perimetrul va:

$$P(t) = 4 \left(|t| + \frac{2}{|t|} \right).$$

Cea mai mică valoare a perimetrului se poate determina cu ajutorul inegalității bine cunoscute, care leagă media aritmetică și media geometrică a două numere:

$$4 \left(|t| + \frac{2}{|t|} \right) \geq 8 \sqrt{|t| \cdot \frac{2}{|t|}} = 8\sqrt{2}.$$

Valoarea căutată se primește în două puncte simetrice $t = \pm\sqrt{2}$.

Răspuns: $t = \pm\sqrt{2}$ ($P_{\min} = 8\sqrt{2}$).

$t = \pm\sqrt{2}$ ($P_{\min} = 8\sqrt{2}$).

Exemplul 5 [3]. Una din laturile trapezului coincide cu diametrul cercului circumscris, iar perimetrul este de n ori mai mare decât raza acestui cerc. De aflat unghiul ascuțit al trapezului.

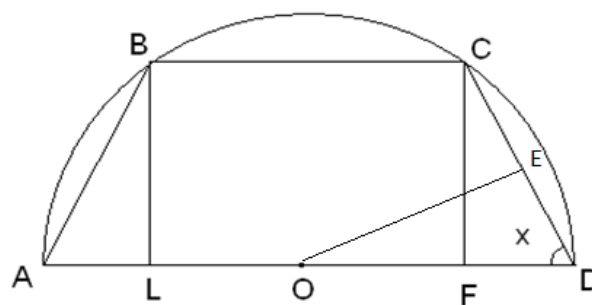


Figura 1.

Soluție. Fie $ABCD$ trapezul dat, O - centrul cercului circumscris, BL, CF - înălțimile trapezului, $OE \perp CD$, R - raza cercului circumscris și x - mărimea unghiului ascuțit al trapezului. Perimetrul

$$P = |AD| + |BC| + 2|CD| = |AD| + (|AD| - 2|FD|) + 4|DE| = 4R - 2|FD| + 4|DE|.$$

$$P = |AD| + |BC| + 2|CD| = |AD| + (|AD| - 2|FD|) + 4|DE| = 4R - 2|FD| + 4|DE|.$$

Din triunghiurile ODE și CDF , avem:

$$|DE| = R \cos x$$

$$|FD| = |CD| \cos x = 2R \cos^2 x.$$

$$|FD| = |CD| \cos x = 2R \cos^2 x.$$

Din condițiile problemei, avem:

$$4R - 4R \cos^2 x + 4R \cos x = nR$$

$$4R - 4R \cos^2 x + 4R \cos x = nR$$

$$, \text{ sau } 4 - 4 \cos^2 x + 4 \cos x = n$$

$$4 - 4 \cos^2 x + 4 \cos x = n.$$

Rezolvând ultima ecuație, obținem:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2}$$

Evident, $n \leq 5$ și $0 \leq \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2} < 1$

$0 \leq \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2} < 1$. Din inecuația dublă obținem:

$$n > 4$$

$$x = \arccos \frac{1 \pm \sqrt{5-n}}{2}$$

$$4 < n \leq 5$$

Să ne închipuim că punctele B și C se apropie alunecând pe cerc. Atunci mărimile unghiurilor $BADBAD$ și $CDACDA$ se vor micșora. În momentul când aceste puncte vor coincide trapezul se va transforma într-un triunghi dreptunghic isoscel, unghiul de la baza căruia va avea 45° . Prin urmare:

$$45^\circ < x < 90^\circ \quad 45^\circ < x < 90^\circ \text{ și}$$

$$0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observăm că $\frac{1-\sqrt{5-n}}{2} < \frac{\sqrt{21-\sqrt{5-n}}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ are loc pentru orice valoare admisibilă $n \in (4,5]$, iar $\frac{1+\sqrt{5-n}}{2} < \frac{\sqrt{21+\sqrt{5-n}}}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ are loc pentru $n > 2(1+\sqrt{2})$.

Răspuns. Dacă $4 < n < 2(1+\sqrt{2})$ problema are o soluție $x = \arccos \frac{1-\sqrt{5-n}}{2}$; dacă $2(1+\sqrt{2}) < n < 5$ problema are două soluții $x = \arccos \frac{1\pm\sqrt{5-n}}{2}$; o singură soluție $x = 60^\circ$ problema are și pentru $n = 5$.

Exemplul 6 [4]. De determinat toate valorile parametrului α , pentru care ar exista o piramidă triunghiulară cu laturile bazei 1, α , α , α și cu muchiile laterale opuse 1, 1, α .

Soluție: În primul rând, vom defini condițiile necesare pentru parametrul α .

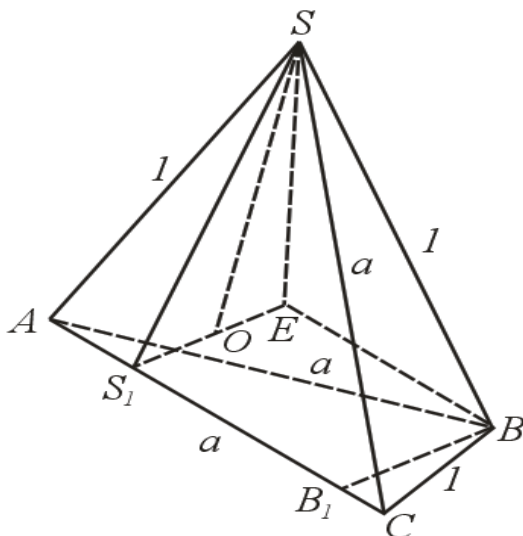


Figura 2.

În piramida SABC, avem:

$$|AB| = |AC| = |SC| = \alpha, |BC| = |SA| = |SB| = 1$$

(Figura 2).

Din $\triangle ABC$, obținem:

$$\alpha + \alpha > 1, \text{ deci } \alpha > \frac{1}{2} \quad \alpha + \alpha > 1, \text{ deci } \alpha > \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Din } \triangle SBC, \triangle SBC, \text{avem: } 1 + 1 > \alpha \text{ sau } \alpha < 2$$

$$1 + 1 > \alpha \text{ sau } \alpha < 2 \quad (2)$$

Fie O proiecția ortogonală a vârfului piramidei S pe planul bazei.

Construim

$$[OS_1] \perp [AC], [BB_1] \perp [AC] \text{ și } [S_1E] \equiv [BB_1]$$

$$[OS_1] \perp [AC], [BB_1] \perp [AC] \text{ și } [S_1E] \equiv [BB_1]$$

Deci,

$$[SS_1] \perp [AC], [AC] \perp [SS_1E].$$

$$[SS_1] \perp [AC], [AC] \perp [SS_1E]. \text{ De aici rezultă,}$$

$BB_1S_1EBB_1S_1E$ este un dreptunghi și deci:

$$[BE] \parallel [AC], \text{ și } [BE] \perp [SS_1E]$$

$$[BE] \parallel [AC], \text{ și } [BE] \perp [SS_1E].$$

Prin urmare, $\angle BES = 90^\circ$ $\angle BES = 90^\circ$.

Observăm, că triunghiurile ABC și ASC sunt congruente (după trei laturi), și atunci:

$$|BB_1| = |SS_1| \quad |BB_1| = |SS_1| \text{ (ca înălțimi omoloage în triunghiuri congruente).}$$

Din triunghiul ACS avem:

$$|CS|^2 = |AC|^2 + |AS|^2 - 2|AC||AS| \cos(\angle AC, AS)$$

$$|CS|^2 = |AC|^2 + |AS|^2 - 2|AC||AS| \cos(\angle AC, AS)$$

sau

$$|CS|^2 = |AC|^2 + |AS|^2 - 2|AC||AS_1|$$

$$|CS|^2 = |AC|^2 + |AS|^2 - 2|AC||AS_1|.$$

Substituind în ultima ecuație dimensiunile corespunzătoare, obținem:

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 1 - 2\alpha|AS_1|,$$

$$\alpha^2 = \alpha^2 + 1 - 2\alpha|AS_1|, \text{ de unde } |AS_1| = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$|AS_1| = \frac{1}{2\alpha}.$$

Din triunghiul ASS_1ASS_1 , determinăm

$$|AS_1| = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}, |AS_1| = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}, \quad \text{deci}$$

$$|B_1C| = |AS_1| = \frac{1}{2a}, |B_1C| = |AS_1| = \frac{1}{2a} \text{ și:}$$

$$|BB_1| = |S_1E| = |SS_1| = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}$$

$$|BB_1| = |S_1E| = |SS_1| = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}.$$

Deci,

$$|BE| = |B_1S_1| = |AC| - (|AS_1| + |B_1C|) = \left| a - \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \right) \right| = \left| a - \frac{1}{a} \right|$$

$$|BE| = |B_1S_1| = |AC| - (|AS_1| + |B_1C|) = \left| a - \left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \right) \right| = \left| a - \frac{1}{a} \right|.$$

Din existența piramidei $SABCSABC$, urmează că punctul EE nu coincide cu punctul SS .

Prin urmare, $|BE| < |BS|$ și $|BE| < |BS|$ și deci,

$$\left| a - \frac{1}{a} \right| < 1 \text{ sau } -1 < a - \frac{1}{a} < 1.$$

$$\left| a - \frac{1}{a} \right| < 1 \text{ sau } -1 < a - \frac{1}{a} < 1.$$

După rezolvarea ultimei inecuații duble și considerând că $a > 0$, obținem:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \quad (3)$$

Putem afirma cu siguranță că, atunci când condiția (3) este îndeplinită, condițiile (1) și (2) vor avea loc de asemenea. În acest fel, am obținut că condiția (3) este necesară pentru existența piramidei $SABC$.

Să demonstrăm că această condiție este și suficientă.

Să spunem că condiția (3) are loc. Atunci,

$$\left| a - \frac{1}{a} \right| < 1, a > \frac{1}{2} \left| a - \frac{1}{a} \right| < 1, a > \frac{1}{2} \text{ și există așa}$$

$$\text{seg } b = \sqrt{1 - \left(a - \frac{1}{a} \right)^2} \text{ și } c = \sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}}.$$

Putem ușor coincide, că $c + c > b + c > b$, și deci, există un triunghi SS_1E, SS_1E , unde:

$$|SE| = b, |SS_1| = |S_1E| = c.$$

Prin punctul S putem trasa o dreaptă care va fi perpendiculară pe planul SS_1ESS_1E și să ampla-

săm segmentele $[S_1B_1]$, $[S_1C][S_1B_1]$, $[S_1C]$ în așa fel încât $|S_1B_1| = \left| a - \frac{1}{a} \right|$ și $|S_1C| = |S_1A| = \frac{1}{2a}$. $|S_1B_1| = \left| a - \frac{1}{a} \right|$ și $|S_1C| = |S_1A| = \frac{1}{2a}$. Ulterior, construim $[B_1B] \perp [AC]$, $[B_1B] \perp [AC]$, unde $|B_1B| = c$, $|B_1B| = c$. Ca rezultat obținem punctele A, B, C, SA, B, C, S ce determină piramida $SABC$. Calculând lungimile muchiilor piramidei obținute, conchidem că muchiile acestei piramide au lungimile indicate în condiția problemei.

Astfel, mulțimea tuturor valorilor parametrului a , pentru care piramida indicată în problemă există este determinată de condiția (3).

Răspuns. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$

Concluzii și recomandări:

În concluzie se poate menționa faptul, că rezolvarea problemelor cu parametri oferă oportunități majore formării și dezvoltării deprinderilor de cercetare la elevi în procesul de învățare a matematicii. Analizând rezolvările problemelor de mai sus, raționamentele acestora, ne putem convinge că rezolvând probleme cu grad sporit de dificultate cu elevii dotați intelectual putem forma deprinderi de cercetare: de a analiza rezolvarea problemelor exprimată în termeni de parametri; de a găsi valori ale parametrilor pentru care ecuația ia o formă anumită; de a analiza o ecuație și de a selecta metoda soluției. Materialul didactic a fost dezvoltat pentru organizarea cercetării educaționale de către cadrele didactice care activează în domeniu, deoarece un rol deosebit în organizarea și realizarea cercetării educaționale revine profesorului.

Pentru profesorii implicați în domeniu **recomandăm:** a dedica mai mult timp rezolvării problemelor cu parametri; a crea situații problematice în rezolvarea cărora se merită apărarea punctului său de vedere; organizarea și desfășurarea unor activități de alternativă, proiecte de cercetare; organizarea activităților diferențiate cu elevii dotați intelectual; la rezolvarea problemelor cu parametri, prelucrarea rezultatelor obținute la anumite etape de soluționare joacă un rol special, destul de important. Una dintre formele convenabile, dovedite în practică, servește organizarea și prezentarea rezultatelor sub diferite forme posibile (tabele, scheme, modele); Implementarea consecventă a unei legături organice între munca academică zilnică în clasă și activitățile extra-curriculare prin rezolvare de probleme non-standard va permite profesorului să obțină un mare succes în dezvoltarea capacităților intelectuale ale elevilor.

REFERINȚE BIBLIOGRAFICE:

1. CALMUȚCHI, L. *Metodologia rezolvării ecuațiilor și inecuațiilor cu parametri*. Chișinău: UST, 2010, 221 p. ISBN 978-9975-76-155-0.
2. CALMUȚCHI, L. *Metodologia rezolvării problemelor cu parametri*. Chișinău: UST, 2016, 284 p. ISBN 978-9975-76-155-0.
3. CALMUȚCHI, L., TURAN, O. *Methodology for solving problems with parameters*. Chișinău: Pulsul Pieții. 2022, 137 p. ISBN 978-9975-63-518-9.
4. *Curriculum național. Disciplina Matematica. Clasele a X-a –XII-a*. Chișinău: Lyceum, 2019. ISBN 978-9975-3438-6-2.
5. ВАЖЕНИН, Ю. *Самоучитель решения задач с параметрами*. Екатеринбург: УрГУ, 1996, 84 с. ISBN 5-230-06765-9.
6. ДАЛИНГЕР, В. *Методика обучения математике. поисково-исследовательская деятельность учащихся*: Москва: Издательство Юрайт, 2020. 460 с. ISBN 978-5-534-04755-4.
7. ХУТОРСКОЙ, А. *Развитие одаренности школьников. Методика продуктивного обучения. Пособие для учителя*. М.: 2000. 320 с. ISBN 5-691-00577-4.